ECON 2200, Flervariabel maksimering og omhylning - Handout

Kjell Arne Brekke

February 3, 2012

1 Innledning

Dette notatet er noen begreper og noen oppgaver som kan hjelpe deg til å forberede deg til forelesningen. Om du **prøver** å regne deg gjennom disse oppgavene vil det være mye lettere å følge med på det som blir gjennomgått på forelesningen. Alle oppgavene kan besvares på fronter.uio.no. Logg inn med ditt brukernavn og passord fra uio. Om du svarer på alle spørsmålene i Froner, tjener du 3 poeng til obligatorisk oppgave, uavhengig av om du svarer rett eller galt.

Om du finner oppgavene vanskelig, så ikke bli motløs. Vi skal gå gjennom dette på forelesningen.

2 Maksimering med flere variabler

2.1 Førsteordensbetingelser

I forrige forelesning så vi på stasjonærpunkter.

Theorem 1 *En deriverbar funksjon $z = f(x, y)$ kan bare ha et maksimum eller minimum i et indre punkt i mengden S dersom det er et* ***stasjonært*** *punkt, dvs*

$$f_1'(x, y) = 0 \text{ og } f_2'(x, y) = 0$$

Eksempel
Funksjonen

$$f(x, y) = -x^2 - y^2$$

gir førsteordensbetingelser

$$\begin{aligned} f_x' &= -2x = 0 \\ f_y' &= -2y = 0 \end{aligned}$$

som betyr at

$$x_0 = y_0 = 0$$

er et stasjonærpunkt.

Oppgave 1 *Hvilke stasjonærpunkt har funksjoen $f(x,y) = -x^2 + 2x - y^2$?*

1. Stasjonærpunktet er $x_0 = y_0 = 0$
2. Stasjonærpunktet er $x_0 = 2$ og $y_0 = 1$
3. Stasjonærpunktet er $x_0 = 1$ og $y_0 = 0$
4. Stasjonærpunktet er $x_0 = -1$ og $y_0 = 0$

2.2 Andreordensbetingelser:

Vi husker at førsteordensbetingelsen ikke er nok til å fastslå at et punkt er f.eks. et minimumspunkt. Vi repeter først hva minimumspunkt betyr:

Definition 2 *Punktet (x_0, y_0) er et minimum dersom*

$$f(x_0, y_0) \leq f(x,y) \text{ for alle } x, y \text{ (i definisjonsområdet)}$$

Klarer vi å finne **ett eneste** punkt (x, y) der

$$f(x_0, y_0) > f(x,y)$$

er det altså ikke et minimum.

Når vi maksimerte funksjoner av en variabel husker vi at vi måtte ha en smilemunn for at det skulle være et minimum. Som vi skal se, må vi fortsatt kreve

$$f''_{xx} \geq 0,\ f''_{yy} \geq 0$$

for at stasjonærpunktet skal være et minimum. Men er det nok?

Oppgave 2 *Vis at $(0,0)$ er et stasjonærpunkt til funksjonen*

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 10xy$$

og regn ut

$$f''_{xx} \text{ og } f''_{yy}$$

Beregn så verdiene

$$f(0,0),\ f(1,1) \text{ og } f(-1,1)$$

og bruk dette til å avgjøre om stasjonærpunktet kan være et minimum eller maksimum.

1. $f(0,0)$ er større enn både $f(1,1)$ og $f(-1,1)$, det tilsier et maksimum
2. $f(0,0)$ er mindre enn både $f(1,1)$ og $f(-1,1)$, det tilsier et minimum
3. $f(0,0)$ er mindre enn $f(1,1)$ men større enn $f(-1,1)$, altså kan det ikke være hverken maksimum eller minimum.

2.3 Tilstrekkelige betingelser

Uten videre begrunnelse får du nå de tilstrekkelige betingelsene vi trenger.

Theorem 3 (Setning 13.1.1 (s 471)) *La* (x_0, y_0) *være et indre stasjonært punkt for funksjonen* f*.*
a) (Konkav f*) Dersom for alle* (x, y)

$$f''_{xx} \leq 0,\ f''_{yy} \leq 0 \text{ og } f''_{xx}f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2 \geq 0$$

så er (x_0, y_0) *et maksimumspunkt*
b) (Konveks f*) Dersom for alle* (x, y)

$$f''_{xx} \geq 0,\ f''_{yy} \geq 0 \text{ og } f''_{xx}f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2 \geq 0$$

så er (x_0, y_0) *et maksimumspunkt*

Oppgave 3 *Betrakt funksjonen*

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$$

her er $x_0 = y_0 = 0$ *et stasjonærpunkt. Regn ut* f''_{xx}*,* f''_{yy} *og* $f''_{xx}f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2$ *og avgjør hva slags punkt det er. Er dette et:*

1. Maksimum
2. Minimum
3. Ingen av delene

3 Omhylningsteoremet

Oslo og Trondheim ligger omtrent på samme lengdegrad eller meridian. Vi kan derfor trekke en rett linje nesten rett nordover fra Oslo til Trondheim. La x være hvor mange mil nord for Oslo vi befinner oss på denne linja. Vi ser så på en bestemt dag, f.eks. 20 juni 2010, og la t gå fra 0 til 24 og angi tidspunkt på døgnet. La så $f(x, t)$ være temperaturen på punkt x på tidspunkt t. Et sted nær Hamar svarer til et punkt x_0 på denne linja. Men det gir ikke mening å spørre: "Hva var temperaturen på Hamar den 20. juni 2010?" Det finnes uendelig mange svar, $f(x_0, t)$, ett for ethvert valg av t. Men spør du "Hva var **maksimumstemperaturen** på Hamar den 20. juni 2010?" så er det bare ett svar. La oss kalle maksimumstemperaturen på punkt x for $g(x)$

$$g(x) = \max_t f(x, t)$$

Maksimumstemperaturen avhenger bare av den ene variabelen x, vi har "maksimert bort" den andre, t.

Vi ønsker så å derivere den nye funksjonen $g'(x)$. Vi må da sammenligne maksimumstemperaturen på to punkt, Hamar $g(x_0)$ og si Brummundal $g(x_0+h)$. På Hamar er det varmest på tidspunkt $t^*(x_0)$, altså

$$g(x_0) = f(x_0, t^*(x_0))$$

mens på Brummundal er det varmest på tidspunkt $t^*(x_0+h)$,

$$g(x_0+h) = f(x_0+h, t^*(x_0+h))$$

Det er to forhold som bidrar til en forskjell i maksimumstemperaturen på Hamar og Brummundal: Brummindal ligger lenger nord, vi har endret x, Vi kaller denne forskjellen Δ_x

$$\Delta_x = f(x_0+h, t^*(x_0)) - f(x_0, t^*(x_0))$$

Den andre forskjellen er at Brummundal er varmes på et litt annet ulikt tidspunkt, vi kaller denne forskjellen Δ_t:

$$\Delta_t = f(x_0+h, t^*(x_0+h)) - f(x_0+h, t^*(x_0))$$

Nå kommer poenget: Fordi temperaturkurven er flat på toppen, så kan vi ta litt lett på det eksakte tidspunktet for når det er varmest, uten at det betyr noe. Så lenge h er liten blir Δ_t mye mindre enn Δ_x. Vi kan med andre ord ta lett på tidspunktet, fordi kurven uansett er flat på toppen.

Mer presist gir dette det vi kaller **Omhylningsteoremet** som sier at

$$g'(x) = f'_x(x, t^*(x))$$

Vi trenger altså ikke regne på f'_t selv om det vitterlig kan være varmest på ulikt tidspunkt i Hamar og Brummundal.

Anta nå at

$$f(x,t) = 20 - \frac{xt}{10} - \frac{(t-14)^2}{100}$$

mens

$$g(x) = \max_t \left(20 - \frac{xt}{10} - \frac{(t-14)^2}{100}\right) = f(x, t^*(x))$$

Oppgave 4 *Hva blir $g'(x)$?*

1. $g'(x) = -\frac{t^*(x)}{10} - \frac{x}{10} - \frac{t^*(x)-14}{50}$
2. $g'(x) = -\frac{t^*(x)}{10}$
3. $g'(x) = -\frac{x}{10} - \frac{t^*(x)-14}{50}$